

۱- گزینه ۴ صحیح است.

برای محاسبه اندازه $|\vec{c}|$ باید رابطه آن را مجذور برسانیم.

$$|\vec{c}|^2 = (\vec{b} \times \vec{a}) - \vec{b}^2 = (\vec{b} \times \vec{a}) - \vec{b} \cdot (\vec{b} \times \vec{a}) - \vec{b}^2$$

$$= (\vec{b} \times \vec{a}) \cdot (\vec{b} \times \vec{a}) - \vec{b} \cdot (\vec{b} \times \vec{a}) - (\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b}$$

$$= |\vec{b} \times \vec{a}|^2 - 0 - 0 + |\vec{b}|^2 = 4 + 1 = 5$$

$$\Rightarrow |\vec{c}|^2 = 5 \Rightarrow |\vec{c}| = \sqrt{5}$$

۲- گزینه ۳ درست است.

ریشه‌های معادله مشخصه $|A - \lambda I| = 0$: تعیین مقادیر ویژه

$$\Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 3 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) - 2 - (1)(3-\lambda-3) + (1)2 - 3(2-\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)(\underbrace{6-5\lambda+4}_{\lambda^2-5\lambda+4}) + \lambda + (2-6+3\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 4\lambda + \lambda^2 - 5\lambda + 4 + \lambda + 3\lambda - 4 = 0$$

$$\Rightarrow -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 5\lambda = 0 \Rightarrow -\lambda(\underbrace{\lambda^2 - 6\lambda + 5}_{(\lambda-5)(\lambda-1)}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 1 \\ \lambda = 5 \rightarrow \text{MAX} \end{cases}$$

۳- گزینه ۱ صحیح است.

مفهوم فاصله دو خط تنها برای خطوط موازی و متنافر (طول عمود مشترک) معنا دارد. در این سوال چون هادی دوخط (ضرایب S و t) باهم موازی نیستند پس دو خط متنافرند و باید طول عمود مشترک (کوتاهترین فاصله بین دو خط متنافر) بدست آوریم.

$$\text{خط اول: } \begin{cases} A(1, 1, 0) \\ \vec{V}_1(1, 6, 2) \end{cases} \quad \text{خط دوم: } \begin{cases} B(1, 5, -2) \\ \vec{V}_2(2, 15, 6) \end{cases}$$

$$\vec{AB} = (0, 4, -2) \Rightarrow |HH'| = \frac{|\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 \cdot \vec{AB}|}{|\vec{V}_1 \times \vec{V}_2|} = \frac{|(6, -2, 3) \cdot (0, 4, -2)|}{\sqrt{36 + 4 + 9}} = \frac{14}{7} = 2$$

۴- گزینه ۱ صحیح است.

به شرطی دستگاه معادلات همگن (ستون جوابها صفر) بی‌شمار جواب دارد که همه معادلات روی هم باشند. به این ترتیب، ضرایب متغیرها باید ضربی از هم باشند یعنی دترمینان ضرایب صفر شود. (شرط وابستگی)

$$|A| = \begin{vmatrix} a & -3 & 1 \\ 1 & 9 & -4 \\ 1 & a & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a(-9 + 4a) + 3(-1 + 4) + (a - 9) = 0$$

$$\Rightarrow 4a^2 - 9a + 9 + a - 9 = 0 \Rightarrow 4a(a - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \end{cases}$$

۵- گزینه ۳ صحیح است.

$$(4y\vec{A} - 9x\vec{B}) \perp (x\vec{A} + y\vec{B}) \Rightarrow \vec{B} = 0. \quad \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

$$M = \|2A + 3B\| = ?$$

$$\text{فرض براساس} \Rightarrow 4xy|A|^2 + 4y^2\vec{A} \cdot \vec{B} - 9x^2\vec{A} \cdot \vec{B} - 9xy|B|^2 = 0$$

$$144xy + (4y^2 - 9x^2)\vec{A} \cdot \vec{B} - 9xy|B|^2 = 0$$

$$x = 1, y = 0 \Rightarrow 0 + (-9\vec{A} \cdot \vec{B}) - 0 = 0 \Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = 0^*$$

$$\xrightarrow{*} 144xy - 9xy|B|^2 = 0 \rightarrow xy(144 - 9|B|^2) = 0 \rightarrow 144 - 9|B|^2 = 0 \rightarrow |B|^2 = 16 \Rightarrow |B| = 4$$

$$\xrightarrow{\wedge} M^2 = (|2A + 3B|)^2 = 4|A|^2 + 9|B|^2 + 12|\vec{A} \cdot \vec{B}|$$

$$= 4(36) + 9(16) = 144 + 144 + 288 \xrightarrow{\sqrt{}} M = 12\sqrt{2}$$